QUESTÃO 21

Dez cartões estão numeradas de 1 a 10. Depois de embaralhados, são formados dois conjutno de 5 cartões cada. Determine a probabilidade de que os números 9 e 10 apareçam num mesmo conjunto.

Resolução:

$\{C_1, C_2, \ldots, C_{10}\}$

Espaço Amostral = todas as possibilidades de se formar dois conjuntos com 5 elementos cada.

$$\#\,\Omega = C_{10,5} \cdot 1 = \frac{10!}{5!\,5!}$$

Evento = os números 9 e 10 devem figurar num mesmo conjunto. Fixando-se 9 e 10, temos:

$$\Rightarrow \quad \#\,E = C_{8,3} + C_{8,5} = 2 \cdot \frac{8!}{3!\;5!}$$

$$P = \frac{2 \cdot 8!/3!\,5!}{10!/5!\,5!} = \frac{2 \cdot 8!}{3!\;5!} \cdot \frac{5!\,5!}{10!} = \frac{4}{9}$$

QUESTÃO 22

Determine os valores reais de *x* de modo que $\operatorname{sen}(2x) - \sqrt{3}\cos(2x)$ seja máximo.

Resolução:

Seja

$$E(x) = sen(2x) - \sqrt{3}cos(2x)$$

$$E(x) = 2 \cdot \left[\frac{1}{2}\,sen(2x) - \frac{\sqrt{3}}{2}cos(2x)\right]$$

$$E(x) = 2 \cdot \left[sen(2x)cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - cos(2x) \cdot sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$E(x) = 2 \cdot sen\left[2x - \frac{\pi}{3}\right]$$

temos E máximo quando

$$sen\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

QUESTÃO 23

Considere a matriz quadrada A em que os termos da diagonal principal são $1, 1+x_1, 1+x_2, ..., 1+x_n$ e todos os outros termos são iguais a 1. Sabe-se que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{1}{2}$ a razão é 4. Determine a ordem da matriz A para que o seu determinante seja igual a 256.

<u>Resolução</u>:

Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$, tal que

$$det\ A \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_n \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot x_1 \cdot x_2 \ldots x_n = 256$$

Como $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_n = 4x_{n-1}$

temos

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{4^2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{4^{n-1}}{2} = 256$$

$$\frac{4^{1+2+\ldots+n-1}}{2^n} = 256$$

$$\frac{4^{\frac{(\cancel{1}+n-\cancel{1})\cdot(n-1)}{2}}}{2^n}$$

$$\frac{2^{n^2-n}}{2^n} = 2^8$$

$$n^2 - 2n = 8 \Rightarrow n^2 - 2n - 8 = 0$$

$$n_1 = 4 \ \text{e} \ n_2 = -2$$

Logo A é uma matriz de ordem 5

QUESTÃO 24

Seja n um número natural. Sabendo que o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} n & \log_2 2 & -\log_2 \frac{1}{2} \\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243 \\ -5 & \log_5 \frac{1}{125} & -\log_5 25 \end{bmatrix}$ **é igual a 9, determine n e também a soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa A^{-1}.**

Resolução:

$$detA = \begin{vmatrix} n & \log_2^2 & -\log_2 \frac{1}{2} \\ n+5 & \log_3^{3n} & \log_3^{243} \\ -5 & \log_5^{\frac{1}{125}} & -\log_5^{25} \end{vmatrix}$$

$$det\ A = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ n+5 & n & 5 \\ -5 & -5 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} n & 1 \\ n+5 & n \\ -5 & -3 \end{matrix}$$

$$5n + 15n + 2n + 10 \qquad -2n^2 - 25 - 3n - 15$$

$$det\ A = -2n^2 + 19n - 30 = 9$$
$$\Leftrightarrow -2n^2 + 19n - 39 = 0$$
$$\Delta = 361 - 312 = 49$$
$$n_{1,2} = \frac{-19 \pm 7}{-4} \Rightarrow n_1 = \frac{-19+7}{-4} = 3$$
$$n_2 = \frac{-19-7}{-4} = \frac{26}{4}$$

logo $n = 3$ e temos que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Como $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$, logo

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & \\ y & \\ z & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ldots \\ 0 & \ldots \\ 0 & \ldots \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ 8x + 3y + 5z = 0 & \times 2 \\ -5x - 3y - 2z = 0 & \times 5 \end{cases} . \begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ 16x + 6y + 10z = 0 \\ -25x - 15y - 10z = 0 \end{cases}$$

da 2ª e 3ª equações temos

$$-9x - 9y = 0 \Rightarrow y = -x$$

Subst. na 2ª equação temos

$$8x - 3x + 5z = 0 \Rightarrow z = -x$$

Agora na 1ª temos

$$3x - y - x = 1 \Rightarrow x = 1$$
$$y = -1$$
$$z = -1$$

logo $x + y + z = 1 - 1 - 1 = -1$

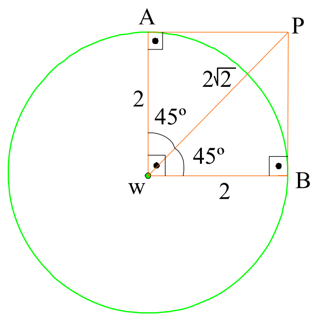
QUESTÃO 25

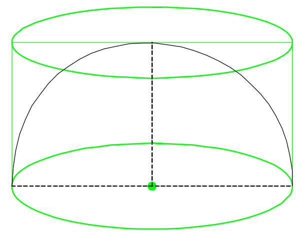
Em um plano estão situados uma circunferência ω de raio 2 *cm* e um pnto *P* que dista $2\sqrt{2}\ cm$ do centro de ω. Considere os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes a ω nos pontos *A* e *B*, respectivamente. Ao girar a região fechada delimitada pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ e pelo arco menor $\overset{\frown}{AB}$ em torno de um eixo passando pelo centro de ω e perpendicular ao segmento $\overline{PA}$ obtém-se um sólido de revoluçã. Determine:

a) A área toatal da superfície do sólido.

b) O volume do sólido.

Resolução:





a) Área total (A_t) será igual:

$$A_t = A_{lateral\ do\ cilindro} + A_{base\ do\ cilindro} + A_{semi\text{-}esfera} \Rightarrow$$

$$A_t = 2\pi \cdot R \cdot h + \pi R^2 + \frac{4\pi R^2}{2} \Rightarrow$$

$$A_t = 2\pi \cdot 2 \cdot 2 + \pi \cdot 2^2 + \frac{4\pi \cdot 2^2}{2} \Rightarrow$$

$$A_t = 8\pi + 4\pi + 8\pi = 20\pi cm^2$$

b) Volume total (V_t) será igual:

$$V_t = V_{cilindro} - V_{semi\text{-}esfera} = \pi R^2 \cdot h - \frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\pi R^3 \Rightarrow$$

$$V_t = \pi \cdot 2^2 \cdot 2 - \frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\pi 2^3 \Rightarrow V_t = 8\pi - \frac{16\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} cm^3$$

QUESTÃO 26

As interseçoes das retas $r: x-3y+3=0, s: x+2y-7=0$ e $t: x+7y-7=0$, duas as duas, respectivamente, definem os vértices de um triângulo que é a base de um prisma reto de altura igual a 2 unidades de comprimento. Determine:

a) A área total da superfície do prisma.

b) O volume do prisma.

<u>Resolução</u>:

$$r: x-3y+3=0$$
$$s: x+2y-7=0$$
$$t: x+7y-7=0$$

$$r \cap s:$$
$$x-3y=-3$$
$$x+7y=7$$
$$\Rightarrow\ -5y=-10 \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1=2 \\ x_1=0 \end{matrix}\right\} A$$

$$r \cap t$$
$$x-3y=0-3$$
$$x+7y=7$$
$$\Rightarrow 10y=-10 \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_2=1 \\ x_2=0 \end{matrix}\right\} B$$

$$s \cap t$$
$$x+2y=7$$
$$x+7y=7$$
$$\Rightarrow\ 5y=0 \Rightarrow\ y_3=0\ \ e\, x_3=7\ \ \}C$$

(a) Lados dos prismas

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$
$$AC=\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$$
$$BC=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}$$

Área do triângulo

$$S=\frac{1}{2}|\Delta|$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}=-3+0-14+7+0+0$$

$$S=\frac{1}{2}|-10|=5$$

Área total do prisma

$$S_T=10+2\sqrt{10}+2\sqrt{20}+2\sqrt{150}$$

(b) Volume

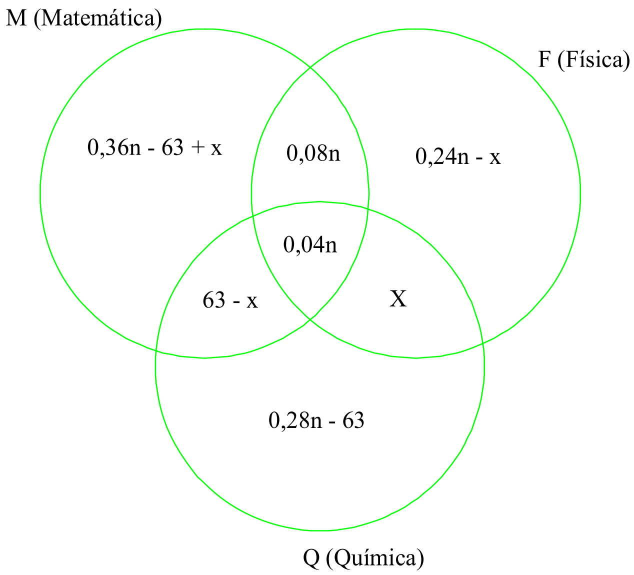
$$V=5\cdot 2=10$$

QUESTÃO 27

Dos *n* alunos de um colégio, cada um estuda pelo menos uma das três matérias: Matemática, Física e Química. Sabe-se que 48% dos alunos estudam matemática, 32% estudam Química e 36% estudam Física. Sabe-se que 48% dos launos estudam Matemática, 32% estudam Química e 36% estudam Física. Sabe-se, ainda, que 8% dos alunos estudam apenas Física e Matemática, enquanto 4% estudam todas as três matérias. Os alunos estudam apenas Química e Física mais aqueles que estudam apenas Matemática e Química totalizam 63 estudantes. Determine *n*.

<u>Resolução</u>:

Considerando que aqueles alunos que estudam apenas *A* e *B* não estudam *C*, temos:



$$0{,}48n + 0{,}2n + 0{,}28 - 63 = n$$
$$0 \cdot n = 63$$

Logo $\nexists n$, o que torna o enunciado inconsistente

Caso interpretemos apenas *A* e *B* com a possibilidade dos alunos estudarem também *C*, temos:

$$|M| = 0{,}98n, |Q| = 0{,}32n, |F| = 0{,}36n, |F \cap M| = 0{,}08n$$
$$|F \cap Q| = x, |M \cap Q| = 63 - x \;\; e \;\; |F \cap M \cap Q| = 0{,}04n$$

Logo, $n = 0{,}48n + 0{,}32n + 0{,}36 - 0{,}08n - 63 + 0{,}04n$

$$n = 1{,}12 - 63$$
$$n = 525$$

QUESTÃO

28

Analise se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & x \geq 0 \\ 3 - x^2, & x < 0 \end{cases}$ **é bijetora e, em caso afirmativo, encontre** $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ **.**

<u>Resolução</u>:

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, x \geq 0 \\ 3 - x^2, x < 0 \end{cases}$

f é injetora

Sejam $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, se $f(x_1) = (x_2)$

temos $3 + x_1^2 = 3 + x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Se $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3 - x_1^2 = 3 - x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$

f é sobrejetora, ou seja, $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{Z} \,|\, f(x) = y$, de fato

$y = 3 + x^2, x \geq 0 \text{ e } y \geq 3$

$x = 3 + y^2, y \geq 0 \text{ e } x \geq 3$

$y = \sqrt{x - 3}, y \geq 0 \text{ e } x \geq 3$

e

$y = 3 - x^2, x < 0 \text{ e } y < 3$

$x = 3 - y^2, y < 0 \text{ e } x < 3$

$y = -\sqrt{3 - x}$

logo $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 3}, x \geq 3 \\ -\sqrt{3 - x}, x < 3 \end{cases}$

QUESTÃO

29

Determine os valores de $\theta \in [0, 2\pi]$ **tais que** $\log_{tg(\theta)} e^{sen(\theta)} \geq 0$ **.**

Resolução:

$\theta \in [0, 2\pi]$ e $\log_{tg(\theta)} e^{sen(\theta)} \geq 0$

devemos ter

$0 < tg\theta \neq 1$

Se

(a) $tg\theta > 1 \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi < \theta < \frac{5\pi}{4}$

$tg\theta > 1 \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi < \theta < \frac{5\pi}{4}$

$\log_{tg\theta} e^{sen(\theta)} \geq 0 \Rightarrow e^{sen(\theta)} \geq (tg\theta)^0 = e^0$

$sen\theta \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$

$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$

(b) $0 < tg\theta < 1 \Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ *ou* $\pi < \theta < \frac{5\pi}{4}$

$\log_{tg\theta} e^{sen(\theta)} \geq 0 \Rightarrow e^{sen(\theta)} \leq 1 = e^0$

$sen\theta \leq 0 \Rightarrow \pi \leq \theta \leq 2\pi$

logo $\pi < \theta < \frac{5\pi}{4}$

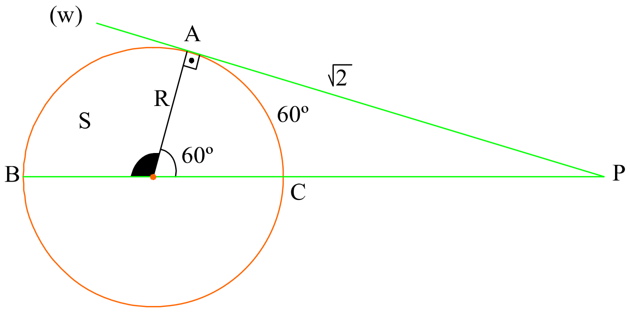
Portanto

$\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$

QUESTÃO 30

As retas r_1 e r_2 são encorentes no ponto *P*, exterior a um círculo ω. A reta r_1 tangencia ω no ponto *A* e areta r_2 intercepta ω nos pontos *B* e *C* diametralmente opostos. A medida do arco $\widehat{AC}$ é 60° e $\overline{PA}$ mede $\sqrt{2}\ cm$. Determine a área do setor menor de ω definido pelo arco $\widehat{AB}$.

Resolução:



$$tg 60^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{R}$$

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{R}$$

$$R = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$$

$$S = \frac{\pi \cdot \left(\sqrt{6}/3\right)^2 \cdot 120}{360} = \frac{\pi \cdot \frac{6}{9}}{3} = \frac{2\pi}{9}$$

PÓDION