QUESTÃO 1

Dado $z=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\boldsymbol{i}\right)$**, então** $\sum_{n=1}^{89} z^n$ **é igual a**

a) $-\frac{89}{2}\sqrt{3}\boldsymbol{i}$ **.**

b) -1.

c) 0.

d) 1.

e) $\frac{89}{6}\sqrt{3}i$ **.**

<u>RESOLUÇÃO</u>

$$z=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}i\right)$$
$$z=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$z=cis\frac{2\pi}{3}$$

Logo,

$$z^n=cis\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$
$$\bullet\, n=1\Rightarrow z^1=cis\frac{2\pi}{3}$$
$$\bullet\, n=2\ \Rightarrow z^2=cis\frac{4\pi}{3}$$
$$\bullet\, n=3\ \Rightarrow\ z^3=cis2\pi=1$$

Daí temos que:

$$z^{3k}=1$$
$$z^{3k+1}=cis\frac{2\pi}{3}$$
$$z^{3k+2}=cis\frac{4\pi}{3}$$

e lembrando que

$z^{3k}+z^{3k+1}+z^{3k+2}=0$ para $k\in\mathbb{N}$ **, temos que**

$$\sum_{n=1}^{90} z^n=0$$

Como $\sum_{n=1}^{90} z^n=\sum_{n=1}^{89} z^n+z^{90}$ **, então**

$$0=\sum_{n=1}^{89} z^n+1$$

e

$$\sum_{n=1}^{89} z^n=-1$$

$\boxed{\textbf{\textit{Letra B}}}$

QUESTÃO 2

Das afirmações abaixo sobre números complexos z_1 e z_2:

I - $|z_1 - z_2| \le ||z_1| - |z_2||$.

II - $|\bar{z}_1 \cdot z_2| = ||\bar{z}_2| \cdot |\bar{z}_2||$.

III - Se $z_1 = |z_1|(\cos\theta + \boldsymbol{isen\theta}) \ne 0$ **, então** $z_1^{-1} = |z_1|^{-1}(\cos\theta - \boldsymbol{isen\theta})$.

é (são) sempre verdaeira(s)

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) apenas II e III.
e) todas.

RESOLUÇÃO

I - Falsa, pela desigualdade triangular temos $|z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$ **.**

II – Falsa, somente se $|z_1| = |z_2|$ **.**

III – verdadeira

Sendo $z^n = |z|^n(\cos n\theta + isen\theta),$ **, então**

$z^{-1} = |z|^{-1}[\cos(-\theta) + isen(-\theta)]$ **, como**

$\cos(-\theta) = \cos\theta$ **e** $sen(-\theta) = -sen\theta$ **,**

$z^{-1} = |z|^{-1}(\cos\theta - isen\theta)$ **(verdadeiro)**

$\boxed{\textit{Letra C}}$

QUESTÃO 3

A soma de todas as soluções da equação em $\mathbb{C}: z^2 + |z|^2 + iz - 1 = 0$ é igual a

a) 2.

b) $\frac{i}{2}$.

c) 0.

d) $-\frac{1}{2}$.

e) -2*i*.

RESOLUÇÃO

$z^2 + |z|^2 + iz - 1 = 0$

Como $z = a + bi$

$$(a+bi)^2 + (\sqrt{a^2+b^2})^2 + i(a+bi) - 1 = 0$$
$$a^2 + 2abi - \cancel{b^2} + a^2 + \cancel{b^2} + ai - b - 1 = 0$$
$$(2a^2 - b - 1) + i(2ab + a) = 0$$

$$2a^2 - b - 1 = 0 \qquad (I)$$
$$2ab + a = 0 \qquad (II)$$

De (II): $a(2b+1) = 0$

$a = 0$ ou $b = -\frac{1}{2}$

1º) Se $a = 0$:

Substituindo em (I)

$-b - 1 = 0$

$b = -1$, logo $\boxed{z = -i}$

2º) Se $b = -\frac{1}{2}$

Substituindo em (I)

$$2a^2 + \frac{1}{2} - 1 = 0$$
$$2a^2 = \frac{1}{2}$$
$$a^2 = \frac{1}{4}$$

$a = \pm\frac{1}{2}$, logo $\boxed{z = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}}$ ou $\boxed{z = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}}$

Soma das raízes¨

$$-i + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{i}{2} - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{i}{2}$$
$$-2i$$

$\boxed{\textit{Letra E}}$

QUESTÃO 4

Numa caixa com 40 moedas, 5 apresentam duas caras, 10 são normais (cara e coroa) e as demais apresentam duas coroas. Uma moeda é retirada ao acaso e a face observada mostra uma coroa. A probabilidade de a outra face desta moeda também apresentar uma coroa é

a) $\frac{7}{8}$.

b) $\frac{5}{7}$.

c) $\frac{5}{8}$.

d) $\frac{3}{5}$.

e) $\frac{3}{7}$.

RESOLUÇÃO

Considerando cara = k e coroa = c

$$40 \begin{cases} 10 \text{ normais} \\ 5 \text{ (kk)} \\ 25 \text{ (cc)} \end{cases}$$

Espaço Amostral E = face apresenta coroa

logo, $n(E) = 35$

Evento A= a outra face ser coroa

logo, $n(A) = 25$

$$p(A) = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$$

$\boxed{\textit{Letra B}}$

QUESTÃO 5

Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios tais que $A \subset B$ e $n(\{C : C \subset B \setminus A\}) = 128$. Então das afirmações abaixo:

I - $n(B) - n(A)$ é único;

II - $n(B) + n(A) \leq 128$;

III - a dupla ordenada $(n(A), n(B))$ é única;

é(são) verdadeira(s)

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) apenas I e II.
e) nenhuma.

<u>RESOLUÇÃO</u>

Se $n(\{C : C \subset B \setminus A\}) = 128$

Sendo $D = \{C : C \subset B \setminus A\}$ e $n(D) = 128$

Mas D **é o conjunto formado por todos os subconjuntos de** $A - B$**.**
Logo

$2^{n(B-A)} = 128 = 2^7 \Rightarrow n(B-A) = \boxed{7}$

Como $A \subset B$ **, então**

$n(B-A) = n(B) - n(A) = 7$

I - $n(B) - n(A)$ **é único; CORRETO**

$n(B) - n(A) = 7$

II - $n(B) + n(A) \leq 128$ **; ERRADO**

Há infinitas possibilidades para $n(B)$ **e** $n(A)$**, por exemplo,**

$n(B) = 207$ e $n(A) = 7$ **, logo** $n(B) + n(A) > \boxed{128}$

III - a dupla ordenada $(n(A),\ n(B))$ **é única; ERRADO**
Mesmo raciocínio anterior.

$\boxed{\textit{Letra}\ \ A}$

QUESTÃO 6

O sistema $\begin{cases} x+2y+3z=a \\ y+2z=b \\ 3x-y-5cz=0 \end{cases}$

a) é possível, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$.

b) é possível quando $a=\dfrac{7b}{3}$ **ou** $c\neq 1$.

c) é impossível quando $c=1$**,** $\forall a,b,\in\mathbb{R}$.

d) é impossível quando $a\neq\dfrac{7b}{3},\forall c\in\mathbb{R}$.

e) é possível quando $c=1$ **e** $a\neq\dfrac{7b}{3}$**.**

RESOLUÇÃO

$$\begin{cases} x+2y+3z=a \quad (I) \\ y+2z=b \;\therefore y=b-2z \quad (II) \\ 3x-y-5cz=0 \quad (III) \end{cases}$$

Substituindo em (I)

$$x+2b-4z+3z=a$$
$$x-z=a-2b \quad (IV)$$

Substituindo em (III)

$$3x-b+2z-5cz=0$$

$$\begin{cases} 3x+2z-5cz=b \quad (V) \\ x-z=a-2b \qquad \text{x}(-3) \end{cases}$$

$$\cancel{3x}+2z-5c\backslash=b$$
$$\cancel{-3x}+3z=-3a+6b$$

$$5z-5cz=-3a+7b$$
$$z=\frac{-3a+7b}{5+5c}$$

$$x=a-2b+z$$
$$x=a-2b+\frac{7b-3a}{5-5c}$$
$$x=\frac{5a-10b-5ac+10bc+7b-3a}{5-5c}$$
$$x=\frac{2a-3b-5ac+10bc}{5-5c}$$

$$y = b - 2z = b - \frac{14b - 6a}{5 - 5c}$$
$$y = \frac{5b - 5bc - 14b + 6a}{5 - 5c}$$
$$y = \frac{6a - 9b - 5bc}{5 - 5c}$$

Logo se $5 - 5c \neq 0$, o sistema é possível. Então, $c \neq 1$

Se $c = 1$:

$$x = \frac{2a - 3b - 5a + 10b}{0} = \frac{7b - 3a}{0}$$
$$y = \frac{6a - 9b - 5b}{0} = \frac{6a - 14b}{0}$$

Se $6a - 14b \neq 0$, o sistema é impossível, ou seja, $a \neq \frac{7b}{3}$.

Conclui-se que quando $a = \frac{7b}{3}$ ou $c \neq 1$ o sistema é possível (determinado ou indeterminado).

Letra B

QUESTÃO 7

Considere as afirmações:

I – Se M é uma matriz quadrada de ordem $n > 1$, não-nula e não-inversível, então existe matriz não-nula N, de mesma ordem, tal que MN é matriz nula.

II – Se M é uma matriz quadrada inversível de ordem n tal que $\det(M^2 - M) = 0$, então existe matriz não-nula X, de ordem n x 1, tal que $MX = X$.

III – A matriz $\begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ \dfrac{tg\theta}{\sec\theta} & 1 - 2sen^2\dfrac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ é inversível $\forall \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Destas, é(são) verdadeira(s)

a) apenas II.
b) apenas I e II.
c) apenas I e III.
d) apenas II e III.
e) todas.

RESOLUÇÃO

I - Como $M \neq 0$ e $\det M = 0$ vamos determinar uma matriz N não nula tal que $M \cdot N = 0_{n \times n}$, como o produto $M \cdot N$ nos fornece n sistemas homogêneos do tipo $M \cdot X_i = 0_{n \times n}$ (S)

X_i é o vetor coluna de N e como $\det M = 0$, S possui solução não trivial, portanto N é não nula.

II - $\det(M^2 - M) = 0$

$\det M \cdot \det(M - I) = 0$, como $\det M \neq 0$ então $\det(M - I) = 0$

Agora temos que $MX = X \Leftrightarrow (M - I) \cdot X = 0_{n \times 1}$ (S), e como (S) é homogêneo e $\det(M - I) = 0$, então S admite solução além da trivial e X é não nula.

III - $\det \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ \dfrac{tg\theta}{\sec\theta} & 1 - sen^2\dfrac{\theta}{2} \end{bmatrix}$

$= \cos\theta \cdot \cos\theta + sen\theta \cdot \dfrac{tg\theta}{\sec\theta}$

$= \cos^2\theta + sen^2\theta = 1 \neq 0$

$\boxed{\textit{Letra E}}$

QUESTÃO 8

Se 1 é uma raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4 + x^2 + ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 - b^3$ é igual a

a) -64.
b) -36.
c) -28.
d) 18.
e) 27.

<u>RESOLUÇÃO</u>

Como x = 1, por Briot - Ruffim:

1	1	0	1	a	b
1	1	1	2	$a+2$	$a+b+2$
	1	2	4	$a+6$	

$$\begin{cases} a + b + 2 = 0 \\ a + 6 = 0 \therefore a = -6 \text{ e } b = 4 \end{cases}$$

Então $a^2 - b^3 = -28$

$\boxed{\textit{Letra C}}$

QUESTÃO 9

O produto das raízes reais da equação $\left|x^2 - 3x + 2\right| = \left|2x - 3\right|$ é igual a

a) -5.
b) -1.
c) 1.
d) 2.
e) 5.

RESOLUÇÃO

$$\left|x^2 - 3x + 2\right| = \left|2x - 3\right|$$

$$x^2 - 3x + 2 = 2x - 3 \ \ (I)$$

ou

$$x^2 - 3x + 2 = -2x + 3 \ \ (II)$$

Resolvendo (I): $x^2 - 5x + 5 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Resolvendo (II): $x^2 - x - 1 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Produto das raízes:

$$\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\frac{20}{4} \cdot \frac{-4}{4} = -5$$

$\boxed{\textit{Letra A}}$

QUESTÃO 10

Considere a equação algébrica $\sum_{k=1}^{3}(x-a_k)^{4-k}$. Sabendo que $x=0$ é uma das raízes e que (a_1,a_2,a_3) é uma progressão geométrica com $a_1=2$ e soma 6, pode-se afirmar que

a) a soma de todas as raízes é 5.
b) o produto de todas as raízes é 21.
c) a única raiz real é maior que zero.
d) a soma das raízes não reais é 10.
e) todas as raízes são reais.

<u>RESOLUÇÃO</u>

$$\sum_{k=1}^{3}(x-a_k)^{4-k}=(x-a_1)^3+(x-a_2)^2+(x-a_3)=0\ (I)$$

como $x=0: -a_1^3+a_2^2-a_3=0$

e $a_1 = 2$ $\quad a_2^2-a_3=8$

Se (a_1,a_2,a_3) é PG, $a_1=2$ e soma 6

$$2+2q+2q^2=6$$
$$q^2+q-2=0 \quad q=1 \ \textit{ou} \ q=-2$$

Se $q=1$ PG $(2,2,2)\cdot a_2^2-a_3\neq 8$ (não convém)

Logo $a_1=2,\ a_2=-4$ e $a_3=8$

Substituindo em (*I*)

$$(x-2)^3+(x+4)^2+x-8=0$$
$$x^3-5x^2+21x=0$$

$$x=0 \text{ ou } x^2-5x+21=0$$
$$\Delta=-59$$
$$x=\frac{5\pm\sqrt{59}i}{2}$$

$\boxed{\textit{Letra A}}$

QUESTÃO 11

A expressão $4e^{2x}+9e^{2y}-16e^{x}-54e^{y}+61=0$ **, com x e y reais, representa**

a) o conjunto vazio.
b) um conjunto unitário.
c) um conjunto não-unitário com um número finito de pontos.
d) um conjunto com um número infinito de pontos.
e) o conjunto $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| 2(e^x-2)^2+3(e^y-3)^2=1\right\}$**.**

<u>RESOLUÇÃO</u>

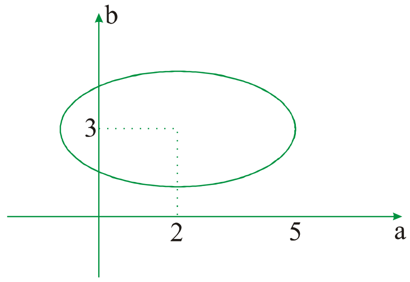
$4e^{2x}+9e^{2y}-16e^{x}-54\,e^{y}-54+61=0$

Substituindo-se $e^x=a \therefore\ x=\ell na$ **e**

$e^y=b \therefore\ x=\ell nb$

$$4a^2+9b^2-16a-54b+61=0$$
$$4a^2-16a+9b^2-54b=-61$$
$$4(a^2-4a)+9(b^2-6b)=-61$$
$$4(a-2)^2-16+9(b-3)^2-81=-61$$
$$4(a-2)^2+9(b-3)^2=36\div 36$$
$$\frac{(a-2)^2}{9}+\frac{(b-3)^2}{4}=1$$

Elipse centro $(2,3)$



$a^2=9\quad \therefore a=3$
$b^2=4\qquad b=2$

Como $x=\ell na\ \ e\ \ y=\ell nb$**, então,** $a>0$ e $b>0$**. Para todo par** (a,b) **positivos da elipse, obtemos pares** (e^x,e^y) **reais.**

$\boxed{\textit{Letra D}}$

QUESTÃO 12

Com respeito à equação polinomial $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ é correto afirmar que

a) todas as raízes estão em $\mathbb{Q}$.

b) uma única raiz está em $\mathbb{Z}$ e as demais estão em $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

c) duas raízes estão em $\mathbb{Q}$ e as demais têm parte imaginária não-nula.

d) não é divisível por $2x - 1$.

e) a única raiz está em e pelo menos uma das demais está em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

<u>RESOLUÇÃO</u>

A soma dos coeficientes é zero, logo 1 é raiz da equação. Utilizando o dispositivo de Briot Ruffini obtemos:

1	2	-3	-3	6	-2
	2	-1	-4	2	

Sendo assim as outras 3 raízes da equação $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ são raízes da equação $2x^3 - x^2 - 4x + 2 = 0$ resolvendo a equação do terceiro grau obtemos:

$$2x^3 - x^2 - 4x + 2 = 0 \ \Rightarrow \ x^2(2x-1) - 2\,(2x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \ (2x-1)\,(x^2-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = \pm\sqrt{2}$$

$\boxed{\textit{Letra E}}$

QUESTÃO 13

Sejam m e n inteiros tais que $\frac{m}{n} = -\frac{2}{3}$ e a equação $36x^2 + 36y^2 + mx + ny - 23 = 0$ representa uma circunferência de raio $r = 1cm$ e centro C localizado no segundo quadrante. Se A e B são pontos onde a circunferência cruza o eixo Oy, a área do triângulo **ABC, em cm^2, é igual a**

a) $\frac{8\sqrt{2}}{2}$.

b) $\frac{4\sqrt{2}}{2}$.

c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

d) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$.

e) $\frac{\sqrt{2}}{9}$.

RESOLUÇÃO

$$\frac{m}{n} = \frac{-2}{3}$$
$$36x^2 + 36y^2 + mx + ny - 23 = 0 \div 36$$
$$x^2 + y + \frac{mx}{36} + \frac{ny}{36} - \frac{26}{36} = 0$$

Coordenadas do centro:

$$-2x_0 = \frac{mx}{36}$$
$$x_0 = -\frac{m}{72}$$
$$\text{como } x_0 < 0,\ \ m > 0$$
$$-2y_0 = \frac{n}{36}$$
$$y_0 = \frac{n}{72}$$

$$\left(\frac{-m}{72}\right)^2 + \left(\frac{-n}{72}\right)^2 - r^2 = \frac{-23}{36}$$
$$\frac{m^2}{5184} + \frac{n^2}{5184} - 1 = -\frac{23}{36}$$
$$m^2 + n^2 - 5184 = -3312$$
$$m^2 + n^2 = 1872$$

Como $n = -\frac{3m}{2}$

$$m^2+\frac{9m^2}{4}=1872$$
$$4m^2+9m^2=7488$$
$$m^2=576$$
$$m=24$$

Então $n=-36$

Logo a equação da circunferência será:

$$36x^2+36y^2+24x-36y-23=0$$

Sendo $C\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

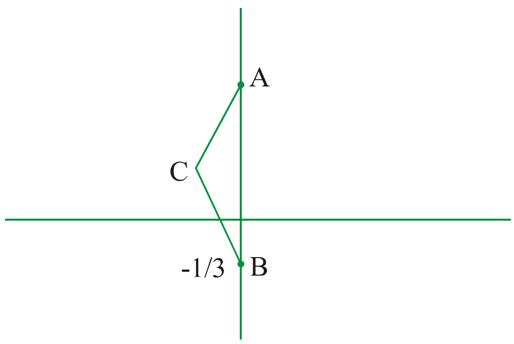
Os pontos A e B **são tais que** $x=0$**:**

$$36y^2-36y-23=0$$
$$\Delta=1296-4\cdot(-828)$$
$$=1296+3312=4608$$
$$y=\frac{36\pm 48\sqrt{2}}{72}$$
$$y=\frac{6\pm 8\sqrt{2}}{12}$$
$$y=\frac{3\pm 4\sqrt{2}}{6}$$

$$A\left(0,\frac{3+4\sqrt{2}}{6}\right)\ e$$

Logo
$$B\left(0,\frac{3-4\sqrt{2}}{6}\right)$$

Graficamente.



$$\Delta ABC=\frac{bh}{2}=$$
$$\frac{\left(\frac{\cancel{3}+4\sqrt{2}}{6}+\frac{4\sqrt{2}-\cancel{3}}{6}\right)\cdot\frac{1}{2}}{2}$$
$$=\frac{8\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{8\sqrt{2}}{36}=\frac{2\sqrt{2}}{9}$$

$\boxed{\textit{Letra}\ \ \textit{D}}$

QUESTÃO 14

Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida , em *radianos*, é igual a

a) $\frac{23}{11}\pi$ **.**

b) $\frac{13}{6}\pi$ **.**

c) $\frac{24}{11}\pi$ **.**

d) $\frac{25}{11}\pi$ **.**

e) $\frac{7}{3}\pi$ **.**

RESOLUÇÃO

V_{horas} = 0,5°/min
$V_{minutos}$ = 6°/min
$V_{aproximação}$ = 5,5°/min

Entre duas superposições consecutivas, deve haver uma “aproximação” de 360°, Logo,

$$\begin{array}{ll} 5{,}5^\circ & - \ 1\text{min} \\ 360^\circ & - \ \boldsymbol{x} \end{array} \quad \Rightarrow \ \boldsymbol{x} = \frac{720}{11}\text{min}$$

Logo, o ponteiro dos minutos varre um ângulo igual a

$$6 \cdot \frac{720^\circ}{11} = \frac{24}{11} \cdot 180^\circ \ \textbf{ ou } \ \frac{24\pi}{11}\textbf{.}$$

$\boxed{\textit{Letra C}}$

QUESTÃO 15

Seja ABC um triângulo retângulo cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem 8 cm e 6 cm, respectivamente. Se D é um ponto sobre $\overline{AB}$ e o triângulo ADC é isósceles, a medida do segmento $\overline{AD}$, em cm, é igual a

a) $\frac{3}{4}$.

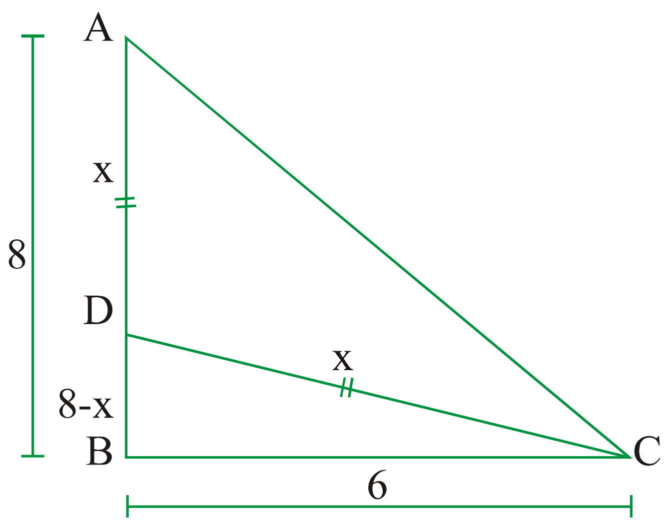
b) $\frac{15}{6}$.

c) $\frac{15}{4}$.

d) $\frac{25}{4}$.

e) $\frac{25}{4}$.

RESOLUÇÃO



$$x^2 = (8-x)^2 + 6$$
$$\cancel{x^2} = 64 - 16x + \cancel{x^2} + 36$$
$$16x = 100$$
$$x = \frac{100}{16} =$$
$$= \frac{25}{4}$$

$\boxed{\textit{Letra D}}$

QUESTÃO 16

Sejam *ABCD* um quadrado e *E* um ponto $\overline{AB}$. Considere as áreas do quadrado *ABCD*, do trapézio *BEDC* e do triângulo *ADE*. Sabendo que estas áreas definem, na ordem em que estão apresentadas, uma progressão aritmética cuja soma é 200 cm^3, a medida do segmento *AE*, em *cm*, é igual a

a) $\frac{10}{3}$.

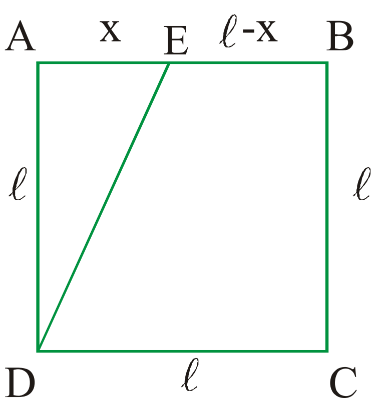
b) 5.

c) $\frac{20}{3}$.

d) $\frac{25}{3}$.

e) 10.

RESOLUÇÃO



$$A_{BEDC} + A_{ADE} = A_{ABCD}$$
$$A_{ABCD} + A_{BEDC} + A_{ADE} = 200$$
$$2\,A_{ABCD} = 200$$
$$\ell^2 = 100$$
$$\ell = 10$$

$$P.A. \Rightarrow \left(100, \frac{(10+10-x)\cdot 10}{2}, \frac{10x}{2}\right)$$
$$200 - 10x = 100 + 5x$$
$$15x = 100$$
$$x = \frac{20}{3}$$

$\boxed{\textit{Letra C}}$

QUESTÃO 17

Num triângulo ABC **o lado** $\overline{AB}$ **mede 2** cm**, a altura relativa ao lado** $\overline{AB}$ **mede 1** cm**, o ângulo** $A\widehat{B}C$ **mede 135° e** M **é o ponto médio de** $\overline{AB}$ **. Então a medida de** $B\widehat{A}C + B\widehat{M}C$ **, em radianos,**

a) $\frac{1}{5}\pi$.

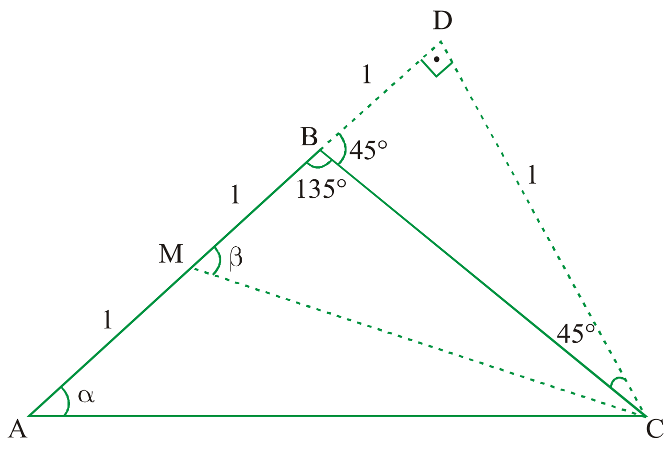
b) $\frac{1}{4}\pi$.

c) $\frac{1}{3}\pi$.

d) $\frac{3}{8}\pi$.

e) $\frac{2}{5}\pi$.

<u>RESOLUÇÃO</u>



$\alpha = B\hat{A}C$

$\beta = B\hat{M}C$

$tg\alpha = \frac{1}{3}$ $\qquad tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$

$tg\beta = \frac{1}{2}$ $\qquad tg(\alpha+\beta) = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$

Como $0 < \alpha < \pi/4 \ e \ 0 < \beta < \pi/4 \ \Rightarrow \ \alpha + \beta = \boxed{\pi/4}$

$\boxed{\textit{Letra B}}$

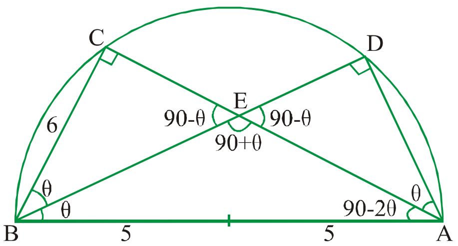
PÓDION

QUESTÃO 18

Um triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 5 cm. Sabe-se ainda que $\overline{AB}$ é o diâmetro, $\overline{BC}$ mede 6 cm e a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ intercepta a circunferência do ponto D. Se α é a soma das áreas dos triângulos ABC e ABD e β é a área comum aos dois, o valor de $\alpha - 2\beta$, em cm^2, é igual a

a) 14.
b) 15.
c) 16.
d) 17.
e) 18.

RESOLUÇÃO



Por Pitágoras, obtemos no $\triangle\, ABC,\ AC = 8$

Pelo Teorema da bissetriz interna temos no $\triangle\, ABC$ **que se** $EC = 3x$ **então** $EA = 5x$**, em que** E **é o pé da bissetriz do ângulo** $A\hat{B}C$ **. Sendo assim temos:**

$$3x + 5x = 8 \ \Rightarrow\ x = 1 \ \Rightarrow EC = 3 \ \text{ e } \ EA = 5$$

Por Pitágoras, obtemos no $\triangle\, EBC,\ EB = 3\sqrt{5} \Rightarrow\ sen\theta = \dfrac{3}{3\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

e

$$\cos = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \ \Rightarrow\ \frac{ED}{EA} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow ED = \sqrt{5}$$

e

$$\frac{AD}{EA} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \ \Rightarrow\ AD = 2\sqrt{5}$$

$$\alpha - 2B = \text{Área}(\Delta BCE) + \text{Área}(\Delta ADE)$$
$$= \frac{3\cdot 6}{2} + \frac{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{2} = 9 + 5 = 14$$

$\boxed{\textit{Letra}\ \ A}$

QUESTÃO 19

Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12 cm e a aresta da base mede $\frac{10}{3}\sqrt{3}\,cm$. Então o raio da esfera, em *cm*, é igual a

a) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$.

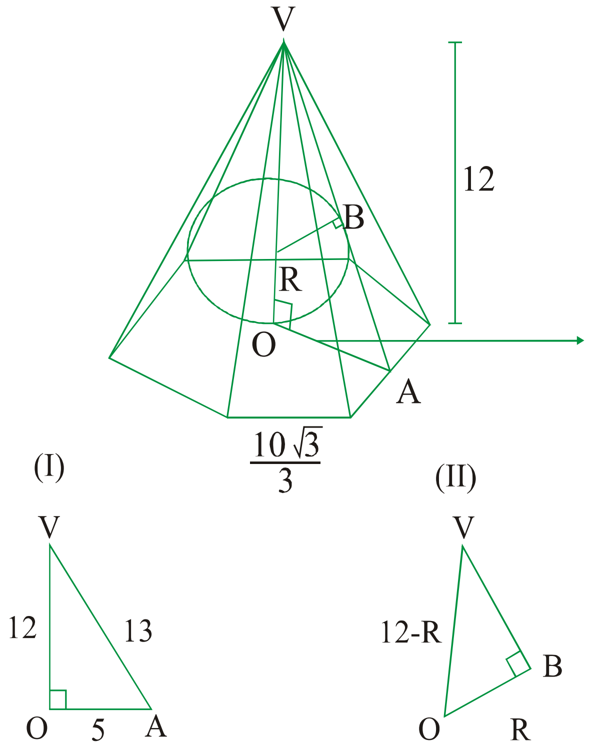
b) $\frac{13}{3}$.

c) $\frac{15}{4}$.

d) $2\sqrt{3}$.

e) $\frac{10}{3}$.

RESOLUÇÃO



apótema da base $a_p = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5$

Como os triângulos VOA e VBO **são semelhantes:**

$$\frac{5}{R} = \frac{13}{12 - R}$$
$$60 - 5R = 13R$$
$$R = \frac{60}{18} = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$$

$\boxed{\textit{Letra E}}$

QUESTÃO

20

Considere as afirmações:

I – Existe um triedro cujas 3 faces têm a mesma medida $\alpha = 120°$

II – Existe um ângulo poliédrico convexo cujas faces medem, respectivamente, 30°, 45°, 50°, 50° e 170°.

III – Um poliedro convexo, que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais tem 9 vértices.

IV – A soma das medidas de todas as faces de um poliedro convexo com 10 vértices é 2880°.

Destas, é(são) correta(s) apenas

a) II.
b) IV.
c) II e IV.
d) I, II e IV.
e) II, III e IV.

RESOLUÇÃO

I) Em todo triedro a soma dos ângulos das faces deve ser menor que 360. Como $f_1 + f_2 + f_3 = 360$ **(falso).**

II) Em um ângulo poliedro cada face deve ser menor que a soma de todas as outras.

Como

$$170 < 30 + 45 + 50 + 60$$
$$170 < 175$$

e a soma dos ângulos deve ser menor que 360

$30 + 45 + 50 + 50 + 170 = 345° < 360°$ **(Verdadeiro)**

III)

$$f_3 = 3$$
$$f_4 = 1$$
$$f_5 = 1$$
$$f_6 = 2$$
$$F = 7$$

$$\boldsymbol{nF} = 2A$$
$$9 + 4 + 5 + 12 = 2A \;\therefore\; A = 15$$

Como V + F = A + 2
V = 10 (Falso)

IV) $S = (V - 2) \cdot 360$**, como V = 10**

$$S = 8 \cdot 360$$
$S = 2880$ **(correto)**

$\boxed{\textit{Letra C}}$