QUESTÃO 1

O segundo, o sétimo e o vigésimo sétimo termos de uma Progressão Aritmética (PA) de números inteiros, de razão *r*, formam, nesta ordem, uma Progressão Geométrica (PG), de razão *q*, com $q \text{ e } r \in \sim^*$ (natural diferente de zero). Determine:

a) o menor valor possível para a razão *r* ;
b) o valor do décimo oitavo termo da PA, para a condição do item a.

Resolução:

a) PA (a, a+r, ... a+6r, ..., a+26r, ...)
temos que $(a+6r)^2 = (a+r)(a+26r)$

$$\cancel{a^2} + 12ar + 36r^2 = \cancel{a^2} + 27ar + 26r^2$$
$$15ar - 10r^2 = 0, \text{como } r \neq 0$$
$$15a - 10r = 0$$
$$\text{logo } r = \frac{15a}{10} = \frac{3a}{2}$$

O menor valor possível para r ocorre quando a = 2, logo r =3.

b) $a_{18} = a + 17r$
$a_{18} = 2 + 17 \cdot 3 = 53$

QUESTÃO 2

Os números reais positivos x_1, x_2 e x_3 são raízes da equação $x^3 - ax^2 = a^b - \frac{b}{2}x$, sendo $b \in \sim$ (natural), $a \in z$ (real) e $a \neq 1$. Determine, em função de *a* e *b*, o valor de $\log_a\left[x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)x_1^2+x_2^2+x_3^2\right]^b$.

Resolução:

$$x^3 - ax^2 + \frac{b}{2}x - a^b = 0$$

Como

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{b}{2} \\ x_1x_2x_3 = a^b \end{cases}$$

e

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = a^2 - 2\cdot\frac{b}{2} = a^2 - b$$

daí temos

$$\log_a\left[ab\cdot(a)a^2 - b\right]b = b\cdot\left[b + a^2 - b\right] = a^2b.$$

QUESTÃO 3

Os ângulos de um triângulo obtusângulo são 105º, α e β. Sabendo que $m \in \mathbb{z}$ (real), determine:

a) as raízes da equação $3\sec x + m(\sqrt{3}\cos x - 3sen) = 3\cos x + \sqrt{3}\,sen\,x$, em função de *m*;

b) o valor de *m* para que α e β sejam raízes dessa equação.

Resolução:

Basta dividir a equação por cos x

$$\left(3\sec x + m(\sqrt{3}\cos x - 3senx) = 3\cos x + \sqrt{3}\,senx\right) \div \cos x$$

$$3(1+tg^2x) + m\sqrt{3} - 3m\,tgx = 3 + \sqrt{3}\,tgx$$
$$3tg^2x - (3m+\sqrt{3})tgx + m\sqrt{3} = 0$$

como

1 + tg²x = sec²x   temos

$$3tg^2x - (3m+\sqrt{3})tgx + m\sqrt{3} = 0$$

$$tgx = \frac{3m+\sqrt{3} \pm \sqrt{9m^2 + 6m\sqrt{3} + 3 - 42m\sqrt{3}}}{6}$$

$$tgx = \frac{3m+\sqrt{3} \pm \sqrt{9m^2 - 6m\sqrt{3} + 3}}{6}$$

$$tgx = \frac{3m+\sqrt{3} \pm (3m-\sqrt{3})}{6}$$

$$tgx = m \text{ e } m > 0 \text{ e } tgx = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) com $tgx = \frac{\sqrt{3}}{3}$ temos que $\alpha = 30°$

logo os ângulos do triangulo são $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$ e $\gamma = 105°$ e $m = 1$

QUESTÃO 4

Seja o número complexo Z = a + bi, com a a e $b \in \mathbb{z}$ (real) e $i = \sqrt{-1}$. Determine o módulo de Z sabendo que

$$\begin{cases} a^3 = 3\left(1 + ab^2\right) \\ b^3 = 3(a^2b - 1) \end{cases}.$$

Resolução:

$$\begin{cases} a^3 = 3 + 3a^2b \\ b^3 = 3a^2b - 3 \end{cases}$$

basta observar que $z^3 = (a+bi)^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i$
$= (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$

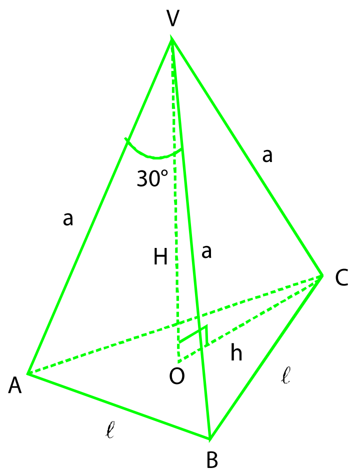
logo $z^3 = 3 + 3i$ e

$$|z|^3 = |3+3i| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18}$$
$$|z| = \sqrt[6]{18}$$

QUESTÃO 5

Uma pirâmide regular triangular apresenta um volume V. Determine o raio da circunferência circunscrita a uma das faces laterais da pirâmide em função de V, sabendo que o ângulo do vértice vale 30°.

Resolução:



Considere a pirâmide regular e de base AC, de lado _ , e vértice V. Pela lei dos cossenos no ΔVAB, tem-se que:

$$\_^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos 30^\circ \;\therefore$$

$$a^2 = 2\_^2 + \_2\sqrt{3} \quad (i)$$

Fazendo Pitágoras nos ΔVOC :

$a^2 = H^2 + h^2$

Substituindo (i) e h = $h < \frac{2}{3}\frac{\_\sqrt{3}}{2}$, tem-se que

$$2\_ + \_^2\sqrt{3} = H^2 + \left(\frac{\_\sqrt{3}}{3}\right)^2 \;\therefore\; H = \frac{\sqrt{5+3\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}\_$$

Sabe-se que

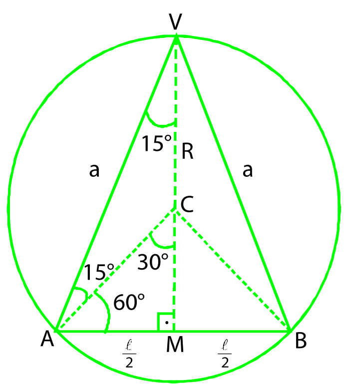
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\_^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{5+3\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}\_$$

$$\_ = \sqrt[3]{6V\sqrt{6\sqrt{3}-10}}$$

Como $6\sqrt{3} - 10 = \left(\sqrt{3}-1\right)^3$, então $\_ = \sqrt[3]{6V} \cdot \sqrt{\sqrt{3}-1}$

Inscrevendo o ΔVBA em uma circunferência, tem-se:



Do ΔACM: $sen\,30^\circ = \frac{\frac{\_}{2}}{R} \Rightarrow R = \_$

Logo, $R = \sqrt[3]{6V} \cdot \sqrt{\sqrt{3}-1}$

QUESTÃO 6

É dada uma parábola de parâmetro p. Traça-se a corda focal MN, que possui uma inclinação de 60° em relação ao eixo de simetria da parábola. A projeção do ponto M sobre a diretriz é o ponto Q, e o prolongamento da corda MN intercepta a diretriz no ponto R. Determine o perímetro do triângulo MQR em função de p, sabendo que N encontra-se no interior do segmento MR.

Resolução:

Tem-se $\overline{OF} = p$ (parâmetro)

Seja $\overline{QM} = a = \overline{MF}$

Assim

$\overline{MR} = 2a$

$\overline{QR} = a\ \text{tg}30° = a\sqrt{3}$

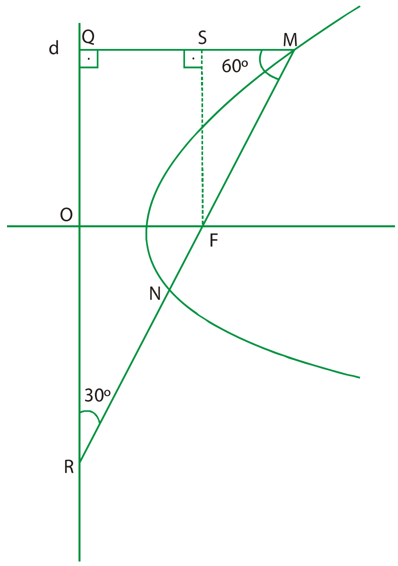
Logo $(2p)_{MQR} = a\left(3 + \sqrt{3}\right)$

Do $\triangle SMF$:

$SM = a - p \Rightarrow \overline{MF} = 2a - 2p = a$

Logo: a = 2p

Portanto: $(2p)_{MQR} = 2p\left(3 + \sqrt{3}\right)$



QUESTÃO 7

Sejam r e $s \in Z$ (inteiro). Prove que (2r + 3s) é múltiplo de 17 se e somente se (9r + 5s) é múltiplo de 17.

Resolução:

Basta observar que

$9r + 5s = 17r - 8r + 17s - 12s = 17(r + s) - 4(2r + 3s)$, e como 17 divide (2$r$ + 3s) , temos que 17 divide 9r + 5s.
Reciprocamente, se 17 divide 9r + 5s, então 17 divide (2r + 3s).

QUESTÃO 8

Calcule as raízes de $f(x)$ em função de a, b e c, sendo a, b, c e $x \in \mathbb{R}$ (real) e $f(x)=\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$.

Resolução:

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}$$

$$f(x)\overset{(1)}{=}(x+a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$$

$$f(x)\overset{(2)}{=}(x+a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} x-a & c-a & b-a \\ c-b & x-b & a-b \\ b-c & a-c & x-c \end{vmatrix}$$

$$f(x)\overset{(3)}{=}(x+a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} x-a & c-a & b-a \\ 0 & x+a-b-c & x+a-b-c \\ b-c & a-c & x-c \end{vmatrix}$$

$$f(x)\overset{(4)}{=}(x+a+b+c)\cdot(x+a-b-c)\begin{vmatrix} x-a & c-a & b-a \\ 0 & 1 & 1 \\ b-c & a-c & x-c \end{vmatrix}$$

$$f(x)\overset{(5)}{=}(x+a+b+c)(x+a-b-c)\cdot\begin{vmatrix} x-a+b-c & 0 & x-a+b-c \\ 0 & 1 & 1 \\ b-c & a-c & x-c \end{vmatrix}$$

$$f(x)\overset{(6)}{=}(x+a+b+c)(x+a-b-c)(x-a+b-c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ b-c & a-c & x-c \end{vmatrix}$$

$$f(x)\overset{(7)}{=}(x+a+b+c)(x+a-b-c)(x-a+b-c)(x-a-b+c)=0$$

Logo, as raízes são $-a-b-c, -a+b+c, a-b+c, a+b-c$

As operações utilizadas foram:
(1) $L_1 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ (Teorema de Jacobi)
(2) Aplicando Chió
(3) $L_2 = L_2 + L_3$(Teorema de Jacobi)
(4) Dividindo L_2 por $(x + a - b - c)$
(5) $L_1 = L_1 + L_3$
(6) Dividindo L_1 por $(x - a + b - c)$
(7) Resolvendo o determinante de ordem 3 e igualando cada fator a zero, obtém-se as raízes

QUESTÃO 9

Considere uma reta r que passa pelo ponto P(2, 3). A reta r intercepta a curva $x^2 - 2xy - y^2 = 0$ nos pontos A e B. Determine:

a) o lugar geométrico definido pela curva;

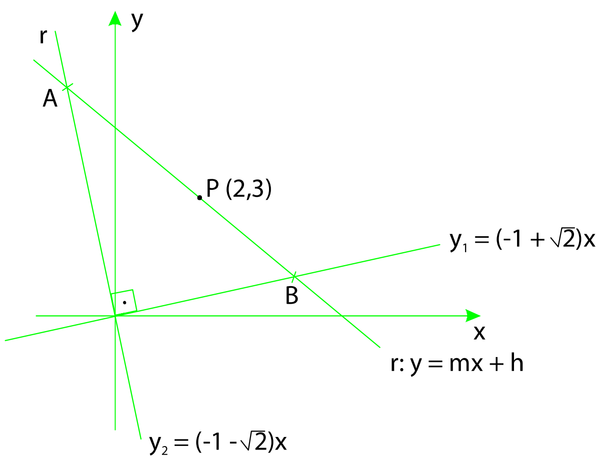
b) a(s) possível(is) equação(ões) da reta r, sabendo que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 17$.

Resolução:

$$x^2 - 2xy + y - 2y^2 =$$
$$(x - y)2 = 2yx$$
$$y = (-1 \pm \sqrt{2})x$$

Tem-se duas retas $(y_1 = (-1 + \sqrt{2})x \text{ e } y_2 = (-1 - \sqrt{2})x)$, com $m_1 \cdot m_2 = (-1 + \sqrt{2}) \cdot (-1 - \sqrt{2}) = -1$. Assim, o lugar geométrico é um par de retas perpendiculares.

b)



Com $P \in r$, com então: $3 = m \cdot 2 + h \Rightarrow h = 3 - 2m$. Assim: $r : y = mx + 3 - 2x$

Como $r \cap y_2 = \{A\}$, então

$$mx_A + 3 - 2M = (-1 - \sqrt{2})x_A \Rightarrow \begin{cases} x_A = \dfrac{2m - 3}{m + 1 + \sqrt{2}} \\ y_A = \dfrac{(2M - 3)(-1 - \sqrt{2})}{M + 1 + \sqrt{2}} \end{cases}$$

Como $r \cap y_1 = \{B\}$, então:

$$mx_B + 3 - 2m = (-1 + \sqrt{2})x_B \Rightarrow \begin{cases} x_B = \dfrac{2m - 3}{m + 1\sqrt{2}} \\ y_B = \dfrac{(2m - 3)(-1 + \sqrt{2})}{m + 1 + \sqrt{2}} \end{cases}$$

Assim:

$$(\overline{PA})^2 = \left(\frac{2m - 3}{m + 1 + \sqrt{2}} - 2\right)^2 + \left(\frac{(2m - 3)(-1 - \sqrt{2})}{m + 1 - \sqrt{2}} - 3\right)^2$$

$$\therefore\ (\overline{PA})^2 = \frac{(33 + 20\sqrt{2})(m^2 + 1)}{(m + 1 - \sqrt{2})^2} \qquad \text{e}$$

$$(\overline{PB})^2 = \left(\frac{2m-3}{m+1-\sqrt{2}} - 2\right)^2 + \left(\frac{(2m-3)(-1+\sqrt{2})}{m+1-\sqrt{2}} - 3\right)^2$$

$$\therefore \ (\overline{PB})^2 = \frac{(33+20\sqrt{2})\,(m^2+1)}{(m+1-\sqrt{2})^2}$$

Como $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 17$, então

$$\frac{(33+20\sqrt{2})(m^2+1)}{(m+1+\sqrt{2})^2} \cdot \frac{(33-20\sqrt{2})(m^2+1)}{(m+1-\sqrt{2})^2} = 17^2$$

Tem-se que: $(33+20\sqrt{2}) \cdot (33-20\sqrt{2}) = 17^2$, então :

<u>1° caso</u>: $m^2+1 = m^2+2m-1 \Rightarrow m=1$

<u>2° caso</u>: $m^2+1 = -m^2-2m+1 \Rightarrow m^2+m=0 \Rightarrow m=-1 \ ou \ m=0$

Daí, temos as seguintes retas: y = x + 1, y = -x + 5, y = 3.

Temos que observar ainda um caso particular, que não aparece nas soluções acima, que é o caso da reta x = 2.

QUESTÃO 10

Os nove elementos de uma matriz *M* quadrada de ordem 3 são preenchidos aleatoriamente com os números 1 ou –1, com a mesma probabilidade de ocorrência. Determine:

a) o maior valor possível para o determinante de *M*;
b) a probabilidade de que o determinante de M tenha este valor máximo.

<u>Resolução</u>:

a) Considere $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \det M$.

Assim: det M = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi (i)
Se det M = 6, então deveríamos ter, por exemplo, ceg = -1. Isto ocorre se, por exemplo, c = e = g = -1
Assim,
det M = -ai - bf - dh + 1 - afh - bdi
Agora, é impossível termos ai = bf = dh = -1 e isto gerar afh = -1 e bdi = -1, pois, ou afh = -1 e bdi = 1 ou afh = 1 e bdi = -1.
Logo, o valor máximo de det M = 4.

b) Perceba que para que det M = 4, deve-se ter apenas umas das parcelas igual a -1. Assim, temos os casos:

1° caso: aei ou bfg ou cdh = -1
se aei = -1
* a = -1, e = i = 1
det M = -1 + gbf + cdh - cg + fh - bd
se cg = -1, então
* c = -1 e g = 1 ⇒ det M = bf - dh + fh - bd
* d = -1 e b = f = h = 1
* ou d = 1 e b = f = h = -1
gera 2 possibilidades (i)
* ou g = -1 e c = 1, gera duas possibilidades, por analogia (ii)

Porém, no grupo aei = -1, pode-se fazer 3 configurações com 1 deles sendo -1, gerando 3x4 = 12 possibilidades.
E, por analogia, acontece com os grupos gbf, cdh. Assim, geram 3 x12 = 36 possibilidades. (A)

* a = e = i = -1
det M = -1 + gbf + cdh + cg + fh + bd, assim:
gbf = cdf = cg = fh = bd = 1

* b = c = d = f = g = h = 1 (iii)
* ou se uma das duplas tiver os dois termos iguais a -1, implica que gbf = cdh = -1, o que obriga outra dupla também ter dois números iguais a -1. Assim, deve-se escolher duas das duplas para terem dois números iguais a -1: $C_{3,2}$ = 3 (iv)

De (iii) e (iv) tem-se 4 possibilidades.
E, por analogia, acontece com os grupos gbf, cdh. Assim, geram 3x4 = 12 possibilidades. (B)

Assim, o caso 1 possui, de (A) e (B), 36 + 12 = 48 possibilidades.

2º caso: ceg ou afh ou bdi = 1
Estes são análogos ao 1º caso, o que geram 48 possibilidades.

Daí, o número de casos favoráveis é dado por 48 + 48 = 96 possibilidades. E, o número de casos possíveis é dado por 2^9, já que cada elemento da matriz possui duas possibilidades, 1 ou -1.

Logo, a probabilidade pedida é $p = \frac{96}{2^9} = \frac{3}{16}$.